Opakování: Definice 3 (Hromadný bod)

nechť $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $\text{resp.} (X,\rho)$, $a \in \mathbb{R}^d (X)$

• Řekneme, že a je hromadný bod M,

jestliže $\forall \delta > 0 : P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$.

• $M' = \{x \in \mathbb{R}^d (X) : x \text{ je hromadný bod } M\}$

• $b \in M \setminus M'$ … izolovaný bod M

Definice 4: nechť $M \subseteq \mathbb{R}^d$ (X,ρ), $a \in M'$,

$A \in \mathbb{R}^k$ (Y,σ), $F : G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$

$F : G \subseteq X \to Y$

Řekneme, že $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} F(x) = A \overset{\text{def.}}{\iff}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a,\delta) \cap M : F(x) \in B(A,\varepsilon)$

cauchyovská posl (*) | (X,ρ) MP je označ. úplný $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall$ cauchy. je k.

Tyto definice zavádíme i pro

(X,ρ) … metrický prostor místo $\mathbb{R}^d$

Opakování z 1. SEM.: (BC) - podmínka:

Posloupnost $\{a_n\}$ splňuje (BC), pokud

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m,n \geq n_0 : \underbrace{|a_m - a_n| < \varepsilon}_{\rho(a_m,a_n) < \varepsilon}$

$\underbrace{(\text{Obecně v MP } (X,\rho)}_{(*)}$

Platí V69 (skripta MA1):

Libovolná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je konvergentní (tj. má limitu v $\mathbb{R}$)

$\iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje (BC).

[konvergentní v $\mathbb{R}$ $\iff$ (BC)]

Věta 84 (Moore – Osgoodova)

Buď (X, ρ) MP, $M \subseteq X$, $a \in M'$.

Buďte $f_n, f : M \to \mathbb{R}$ fce.

nechť platí: (i) $f_n \rightrightarrows f$ na M

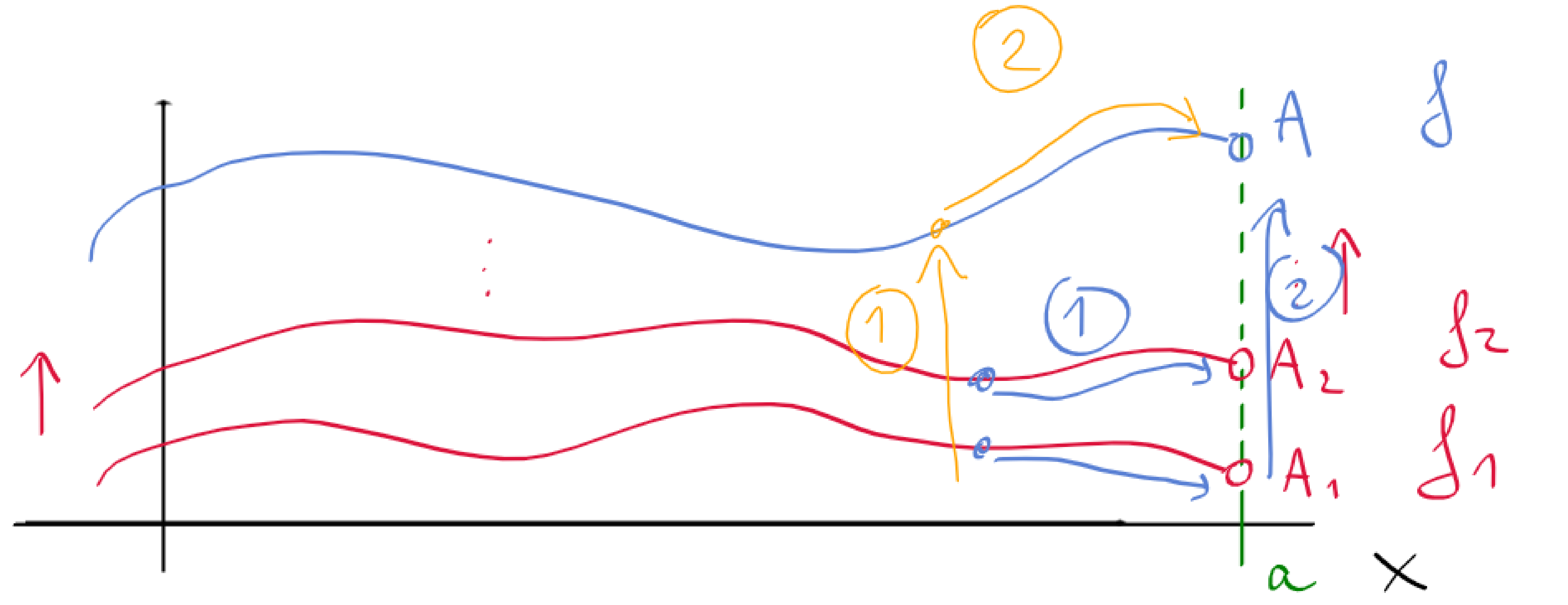
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$: existuje $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R}$.

Pak:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f_n(x) \Big) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \Big),$$

tj. $\underbrace{\lim_{n\to\infty} A_n}_{=:A} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) \stackrel{?}{=} A$ $\boxed{\in \mathbb{R}}$.

(za daných předp. obě strany ex. a rovnají se.)



Důkaz: 1. krok: Existence $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Máme

$f_n \rightrightarrows f$, tj. $\forall \varepsilon\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \forall x \in M: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow \forall m, n \ge n_0$: $|f_n(x) - f_m(x)| \le$

$\le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Chceme: $\{A_n\}$ splňuje (BC). Nechť $\varepsilon > 0$

$\rightsquigarrow n_0 \in \mathbb{N}$ (jako nahoře). Nechť $m, n \ge n_0$.

Pak $|A_n - A_m| = |\lim (f_n(x) - f_m(x))| =$

$= \lim |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$. Podle V69(1.SEM):

existuje $\lim A_n =: A \in \mathbb{R}$.

Krok 2: Chceme: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = A$: $\varepsilon > 0$

Protože $f_n \rightrightarrows f$ a $A_n \to A$, najdeme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_1 \ \forall x \in M: \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall n \geq n_2 \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$.

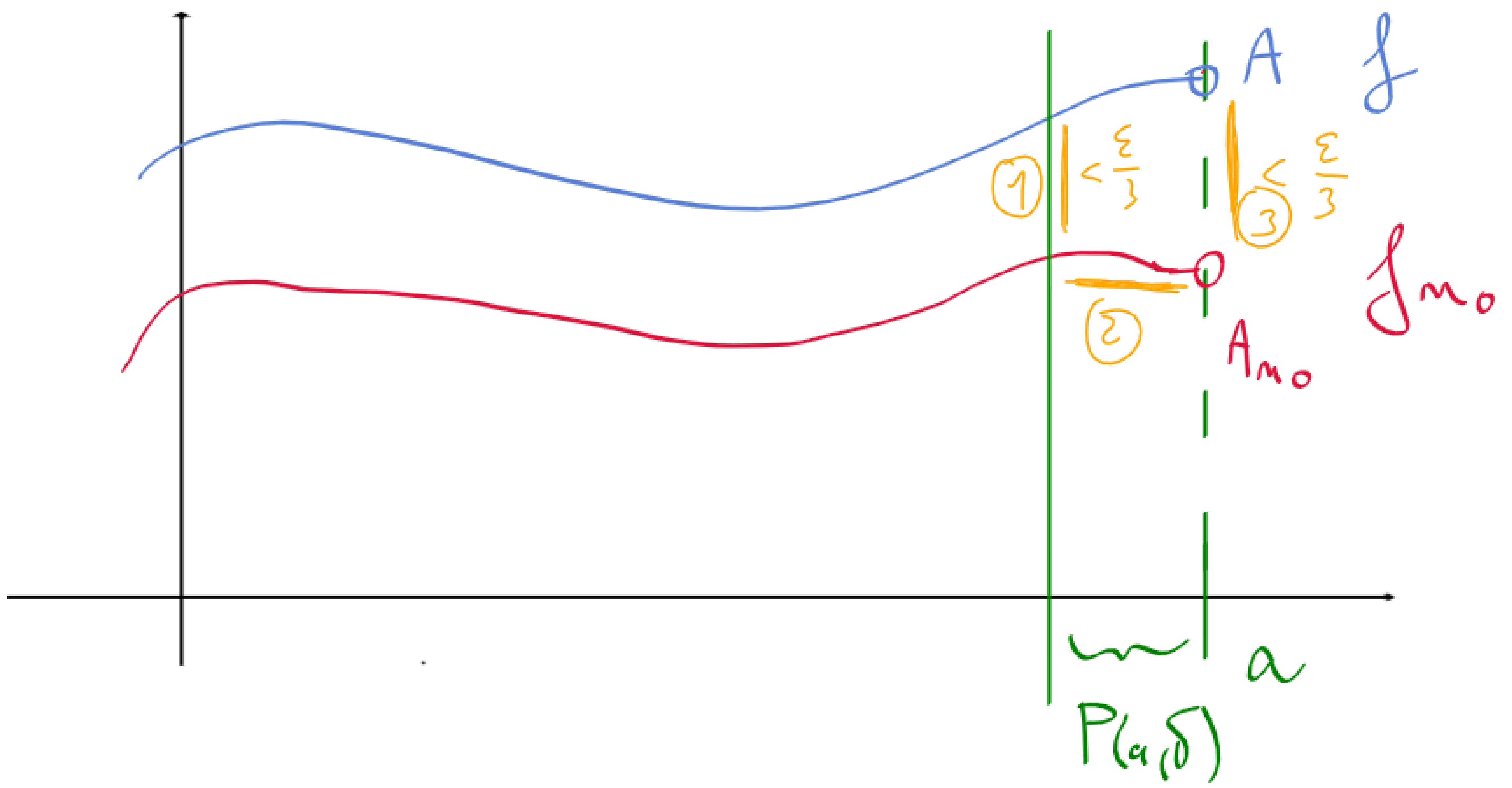
$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Víme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f_{n_0}(x) = A_{n_0}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in M \cap P(a,\delta): \ |f_{n_0}(x) - A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}$

Pak pro $x \in M \cap P(a,\delta)$ platí:

$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - A_{n_0}| +$ (1) (2)

$+ |A_{n_0} - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. (3) $\boxtimes$



Důsledek 85: nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*)$, $\lim\limits_{x\to\beta_-} f_n(x) \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to\beta_-} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to\beta_-}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) \in \mathbb{R}$

(Analogicky pro α_+). **Důkaz**:

$M = (\alpha,\beta)$. | $\beta = \infty$: důkaz zvlášť, analog jako pro VsH.

Důsledek 86: („$\rightrightarrows$ zachovává spojitost")

Buď (M,ρ) MP, $a \in M$. Nechť $f_n, f : M \to \mathbb{R}$. Nechť $f_n \rightrightarrows f$.

Pak (i) f_n jsou spoj. v bodě a $(n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$ f spoj. v bodě a.

(ii) f_n spoj. na M $(n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$ f spoj. na M.

Důkaz: Pokud $a \notin M'$ (tj. a je izol. b. M), pak spojitost je triviální pojem (viz def.), automaticky splněna.

Nechť $a \in M'$. f_n spoj. v a $\iff$ $\lim\limits_{x\in M, x\to a} f_n(x) = f_n(a)$

Podle V84:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \overset{V84}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

Tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, tj. f je spoj. v a. ⊠

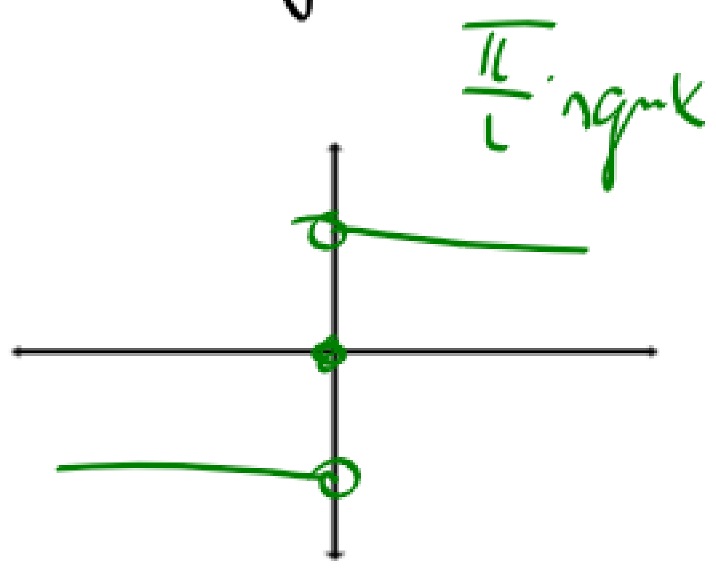
(ii) aplikuj (i) ve všech bodech M.

Příklad: $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} x$$

není spoj. na $\mathbb{R}$, a tedy

$f_n \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.



Tentýž argument pro $M \subseteq \mathbb{R}$

fungeje $\iff$ $0 \in M \wedge 0 \in M'$.

---

na druhou stranu (Těžší cvičení): kdykoliv $0 \notin M'$ (0 není hr. b. M), potom $f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x$ na M.

(dokonce i pokud $0 \in M$ … izol. bod)

HINT: Stačí dokázat $\rightrightarrows$ pro

$M = [a, \infty)$, $a > 0$ a pro

$M = (-\infty, b]$, $b < 0$. $\square$

Důsledek 87: nechť $u_n : M \to \mathbb{R}$ jsou spoj.

nechť $\sum u_n \rightrightarrows s$ (na M).

Pak s je spojitá.

Dk: $s_N := \sum_{n=1}^{N} u_n$.

Víme (předp.) $s_N \rightrightarrows s$ na M.

Ale $\forall N \in \mathbb{N}$: s_N je spojitá na M, díky „aritmetice" spojitosti (Sčítáme konečně spojitých $\rightsquigarrow$ spojitá (1.SEM.)).

Použijeme, že „stejn. limita spojitých (s_N) je spojitá" (D86)

Limita a $(R)\int$, lim. a derivace

Věta 88: Nechť $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$.

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Pak $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$, neboli

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f(x)\right) dx.$$

Důkaz: Označme $\sigma_n := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq$$

$$\leq \int_a^b \sigma_n = \sigma_n \cdot (b-a) \longrightarrow 0,$$

protože $f_n \rightrightarrows f$, a tedy (LoGσ_n) $\sigma_n \to 0$.

Tedy $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

podle L02P. Tj. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. $\boxtimes$

Věta 89: (O derivaci limitní funkce)

Nechť funkce $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

mají vlastní derivaci na (a,b).

Nechť $a,b \in \mathbb{R}$ (tj. (a,b) je omezený).

Nechť: (i) $\exists x_0 \in (a,b)$: $f_n(x_0) \longrightarrow c \in \mathbb{R}$

(ii) $f_n' \rightrightarrows$ na (a,b).

Potom existuje f, že $f_n \rightrightarrows f$, $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a,b).

Tj. $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) a $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$)

<u>Příklad</u> (k vysvětlení (i')):

$f_n' = 1$ na (a,b) , $n \in \mathbb{N}$

$f_n = x + \boxed{C_n}$ integrační konstanty

C_n mohou být takové, že posloupnost $f_n \not\rightrightarrows$. Třeba $C_n = (-1)^n$.

Pak $f_n \not\to$ (nemá limitní fci).

Za předpokladu (i'):

$$\exists x_0 \in (a,b) : f_n(x_0) \to c \in \mathbb{R}.$$

$$f_n(x_0) = x_0 + C_n \longrightarrow c$$

Tedy $C_n \longrightarrow c - x_0$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x + C_n =$$

$$= x + c - x_0.$$

Tj. limitní fce $\exists$ a VS9 tvrdí, že dokonce $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b).